To - utvals testar. [illegible] 10.6, 10.9.

Situasjon: Medisin (to behandlingsmåtar)

Industri (to framstillingsprosessar)

Landbruk (avlingsmengde ved 2 typar gjødsel)

Eks. Måling av algekonsentrasjon ved 2 tidspunkt

Tidspunkt 1	x_{1i}	3.3	3.9	3.2	4.0	4.1	2.9	$n_1 = 6$, $\bar{x}_1 = 3.57$
Tidspunkt 2	x_{2i}	3.3	2.9	3.1	2.5	3.2		$n_2 = 5$ $\bar{x}_2 = 3.0$

$s_1 = 0.497$, $s_2 = 0.3$[illegible]6

$$\left.\begin{array}{ll} X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma^2), & i = 1, 2, \ldots, n_1 \\ X_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma^2), & i = 1, 2, \ldots, n_2 \end{array}\right\} \text{uavh.}$$

$\bar{x}_1 = 3.57$

$\bar{x}_2 = 3.0$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\Big(\mu_1 - \mu_2, \underbrace{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}_{=\ \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}\Big),$$

$$\hat{\sigma}^2 = s_p = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Hypotesetesting

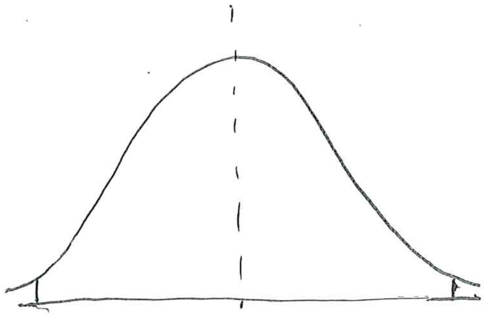
1. $H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$ $\qquad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$.

2. $\alpha = P(\text{forkaste } H_0 \mid H_0 \text{ er rett})$

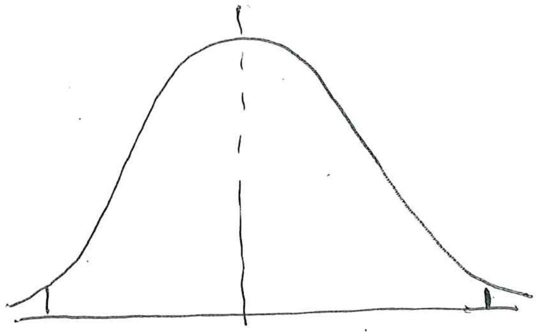
σ kjend $\qquad\qquad \sigma$ ukjend

3. $Z = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d_0}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ $\qquad T = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim$ t-fordelt med $n_1 + n_2 - 2$ fridomsgrader.

4.



$k_1 = -z_{\frac{\alpha}{2}}$ $\quad 0 \quad$ $k_1 = z_{\frac{\alpha}{2}}$



$k_1 = -t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ $\quad$ $k_1 = t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$

5. Finn z evt t.

6. Forkast H_0 på nivå α om z evt. t fell i forkastingsområdet.

Algeksempelet.

1 $d_0 = 0$, $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ $\quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

2. $\alpha = 0.05$

3. $T = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}}}$ ~ t-fordelt med 9 fridomsgrader

4. $t_{0.025, 9} = 2.26$.

5. $t = \dfrac{3.57 - 3}{0.423\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}}} = 2.23$

6. $2.23 < 2.26 \Rightarrow$ ikkje forkast H_0 på nivå 0.05

p-verdien = 0.052

Kommentar. Dersom $s_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2$ og $s_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2$

er svært forskjellige $\Rightarrow$: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ bør ein bruke

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}.$$

Då må ein og justere talet på fridomsgrader til T.

$$V = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2/(n_1-1) + \left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2/(n_2-1)}$$

som i dette eksempelet hadde blitt 8

Parplanen

Dersom x_{1i} og x_{2i}, $i = 1, 2, \ldots, n$ er observasjonar frå like forsøkseiningar (Parplanen) svarar det seg som oftast å utføre ein eit-utvals test der ein nyttar variablene

$$D_i = X_{1i} - X_{2i} \sim N(\overbrace{\mu_1 - \mu_2}^{\mu_D}, \sigma_D^2)$$

Eks situasjonar. Testing av solkrem, einingar høgre og venstre side av ryggen.
Testing av skosolar, einingar høgre og venstre fot.

$H_0: \mu_D = d_0$, Test statistikk: $T = \frac{\bar{D} - d_0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$.

Utvals-storleik to-utvals testar, $n_1 = n_2 = n$

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$ $\qquad$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$

$\beta =$ P(ikkje forkaste H_0 | H_0 er sann)

$$= P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}} \,\middle|\, \mu_1 - \mu_2 = d_0 + \delta\right)$$

$$= P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}}} < \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (d_0+\delta)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}}}\right)$$

$$\approx P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}}}\right)$$

ɔ: $-z_\beta \approx z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}}} \Rightarrow \frac{\delta^2}{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}} \approx \left(z_{\frac{\alpha}{2}} + z_\beta\right)^2$

eller $n \approx \dfrac{\left(z_{\frac{\alpha}{2}} + z_\beta\right)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\delta^2}$

For einsidig test er $n = \dfrac{(z_\alpha + z_\beta)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\delta^2}$

Eks. Algekonsentrasjon. Vil vere 80% sikker på å kunne påstå at algekonsentrasjonen har gått ned dersom reduksjonen er 0.25

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ $\qquad$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$

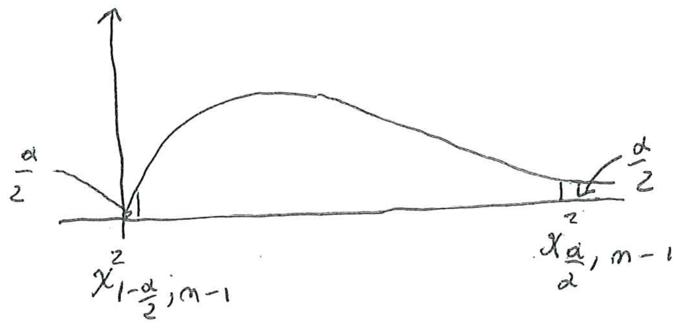
$\alpha = 0.05 \Rightarrow z_\alpha = 1.645$, $\quad z_\beta = 0{,}84$ ($\beta = 0{,}2$), $\delta = 0{,}25$, Assume $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = (0.5)^2$

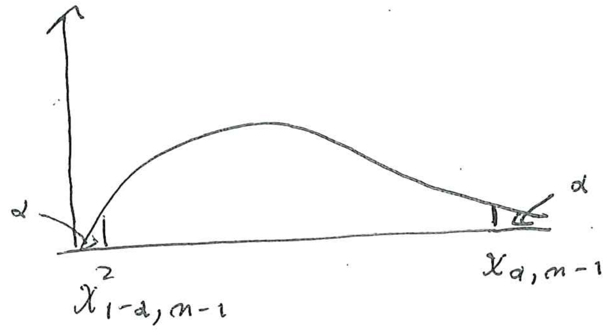
$$n = \frac{(1.645 + 0{,}84)^2 \cdot 2 \cdot (0.5)^2}{(0.25)^2} = 49.04 \quad ɔ: \approx 50$$

Test på varians (Eit utvalt)

1. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $\qquad H_1 : \sigma^2 \underset{<}{\overset{>}{\neq}} \sigma_0^2$

3. $$\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} = \frac{S^2(n-1)}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1) \sim \Gamma\left(\frac{n-1}{2}, 2\right) \text{ under } H_0$$

4. 



$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$. Forkast H_0 om $\frac{S^2(n-1)}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$ eller

$$\frac{S^2(n-1)}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$$

$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$. Forkast H_0 om $\frac{S^2(n-1)}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{\alpha, n-1}$

$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$. Forkast H_0 om $\frac{S^2(n-1)}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{1-\alpha, n-1}$

10.9 Test på 2 forholdstal

p_1 = andelen Volvoeigarar i Noreg

p_2 = — " — " — i Sverige

X_1 = talet på Volvoeigarar i utvalet i Noreg

X_2 = — " — " — i Sverige.

$X_1 \sim B(n_1, p_1)$, $X_2 \sim B(n_2, p_2)$

$$\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1}, \quad \hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2}$$

$H_0: p_1 = p_2$ $\qquad H_1: \begin{cases} p_1 > p_2 \\ p_1 \neq p_2 \\ p_1 < p_2 \end{cases}$

For stor nok n_1 og n_2 er

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \approx N(0,1)$$

Sidan p_1 og p_2 er ukjende, er det vanleg å erstatte p_1 og p_2 med $\hat{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$

og bruke at $$Z^\circ = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \approx N(0,1)$$